



فهرست مطالب

۱- فصل اول: مباحث پایه در علوم ریاضی.....	۱۲
۱-۱- لگاریتم‌ها.....	۱۲
۱-۲- مرکب کردن.....	۱۵
۱-۳- مسئولیت محدود.....	۱۶
۱-۴- ترسیم لگاریتم بازده‌ها.....	۱۷
۱-۵- بازده‌های مرکب مادام‌العمر (دائمی).....	۱۹
۱-۶- ترکیبات.....	۲۰
۱-۷- فاکتورهای تنزیل.....	۲۲
۱-۸- سری‌های هندسی.....	۲۳
۱-۸-۱- سری‌های نامتناهی.....	۲۳
۱-۸-۲- سری‌های متناهی.....	۲۶
۲- فصل دوم: احتمالات.....	۳۰
۲-۱- متغیرهای تصادفی گسسته.....	۳۰
۲-۲- متغیرهای تصادفی پیوسته.....	۳۱
۲-۳- بازده‌های تابع احتمال.....	۳۱
۲-۴- توابع توزیع تجمعی.....	۳۳
۲-۵- توابع توزیع تجمعی معکوس.....	۳۵
۲-۶- پیشامد دوبدو ناسازگار.....	۳۶
۲-۷- پیشامد مستقل.....	۳۷
۲-۸- ماتریس‌های احتمال.....	۳۷

- ۲-۹- احتمال شرطی ۳۹
- ۲-۱۰- قضیه بیز ۴۰
- ۳- فصل سوم: مروری بر مفاهیم آماری ۵۰
- ۳-۱- متوسط‌ها ۵۰
- ۳-۲- جامعه و نمونه ۵۰
- ۳-۳- شاخص‌های مرکزی متغیرهای تصادفی گسسته ۵۲
- ۳-۴- شاخص‌های مرکزی متغیرهای تصادفی پیوسته ۵۳
- ۳-۵- امید ریاضی ۵۵
- ۳-۶- واریانس و انحراف معیار ۶۰
- ۳-۷- متغیرهای استاندارد شده ۶۳
- ۳-۸- کوواریانس ۶۴
- ۳-۹- همبستگی ۶۵
- ۳-۱۰- واریانس پرتفوی و پوشش ریسک ۶۶
- ۳-۱۱- گشتاور ۷۰
- ۳-۱۲- چولگی ۷۰
- ۳-۱۳- کشیدگی ۷۳
- ۳-۱۴- هم‌چولگی و هم‌کشیدگی ۷۵
- ۳-۱۵- بهترین تخمین زن ناآریب خطی (BLUE) ۸۰
- ۴- فصل ۴: توزیع‌های آماری ۸۶
- ۴-۱- توزیع‌های پارامتریک ۸۶
- ۴-۱-۱- توزیع یکنواخت ۸۶



- ۸۸..... ۴-۱-۲- توزیع برنولی
- ۹۰..... ۴-۱-۳- توزیع دو جمله‌ای
- ۹۲..... ۴-۱-۴- توزیع پواسون
- ۹۴..... ۴-۱-۵- توزیع نرمال
- ۹۷..... ۴-۱-۶- توزیع لگ نرمال
- ۱۰۱..... ۴-۱-۷- بخش اول: ایجاد متغیرهای تصادفی نرمال
- ۱۰۳..... ۴-۱-۸- توزیع خی دو
- ۱۰۴..... ۴-۱-۹- توزیع تی-استیودنت
- ۱۰۶..... ۴-۱-۱۰- توزیع F
- ۱۰۷..... ۴-۱-۱۱- توزیع‌های آمیخته
- ۱۱۴..... ۵- فصل ۵: آزمون فرضیه و فاصله اطمینان
- ۱۱۴..... ۵-۱- میانگین نمونه تجدیدنظر شده
- ۱۱۶..... ۵-۲- واریانس نمونه تجدیدنظر شده
- ۱۱۷..... ۵-۳- فاصله‌های اطمینان
- ۱۱۸..... ۵-۴- آزمون فرضیه
- ۱۱۹..... ۵-۴-۱- آزمون به چه روشی؟
- ۱۲۰..... ۵-۴-۲- فاصله اطمینان یک یا دوطرفه
- ۱۲۲..... ۵-۵- بازده‌های سطح اطمینان
- ۱۲۲..... ۵-۶- نامساوی چی بی شف
- ۱۲۳..... ۵-۷- کاربرد VaR
- ۱۲۶..... ۵-۷-۱- پس آزمایی

۱۲۸	۵-۷-۲- زیرجمع پذیری
۱۳۰	۵-۷-۳- کمبود مورد انتظار
۱۳۸	۶- فصل ۶: جبر ماتریس
۱۳۸	۶-۱- یادآوری ماتریس
۱۳۹	۶-۲- عملیات ماتریس
۱۴۰	۶-۲-۱- جمع و تفریق
۱۴۱	۶-۲-۲- ضرب
۱۴۴	۶-۲-۳- ماتریس صفر
۱۴۵	۶-۲-۴- ترانواده
۱۴۶	۶-۳- کاربرد: ماتریس های انتقال
۱۴۸	۶-۳-۱- بخش دوم: تجزیه چولسکی
۱۵۴	۷- فصل ۷: فضای برداری
۱۵۴	۷-۱- بررسی مجدد بردارها
۱۵۶	۷-۲- متعامد
۱۶۱	۷-۳- چرخش
۱۶۵	۷-۴- تحلیل مولفه اصلی
۱۷۰	۷-۴-۱- کاربرد: ساختار زمانی پویا نرخ بهره
۱۷۵	۷-۴-۲- کاربرد: ساختار بازارهای سهام جهانی
۱۸۲	۸- فصل ۸: تحلیل رگرسیون خطی
۱۸۲	۸-۱- رگرسیون خطی (یک رگرسور)
۱۸۴	۸-۱-۱- روش حداقل مربعات معمولی (OLS)



۱۸۷.....	۸-۱-۲- بازبینی بهینه پوشش ریسک
۱۸۸.....	۸-۱-۳- تخمین پارامترها
۱۸۹.....	۸-۱-۴- ارزیابی رگرسیون
۱۹۲.....	۸-۲- رگرسیون خطی چند متغیره
۱۹۳.....	۸-۲-۱- هم خطی
۱۹۴.....	۸-۲-۲- برآورد پارامترها
۱۹۵.....	۸-۲-۳- ارزیابی رگرسیون
۱۹۷.....	۸-۲-۱- کاربرد: تحلیل عاملی
۲۰۱.....	۸-۲-۲- کاربرد: آزمون استرس
۲۰۸.....	۹- فصل ۹: مدل های سری های زمانی
۲۰۸.....	۹-۱- گام های (گشت) تصادفی
۲۰۹.....	۹-۲- اشاعه انحراف
۲۱۱.....	۹-۳- خودرگرسیون (اتورگرسیون)
۲۱۵.....	۹-۴- واریانس و خودهمبستگی
۲۱۶.....	۹-۵- ایستائی
۲۲۱.....	۹-۶- میانگین متحرک
۲۲۱.....	۹-۷- مدل های پیوسته
۲۲۴.....	۹-۸- کاربرد: گارچ GARCH
۲۲۶.....	۹-۸-۱- کاربرد: اشاعه-پرش
۲۲۷.....	۹-۸-۲- کاربرد: مدل های نرخ بهره
۲۳۴.....	۱۰- فصل ۱۰: ضریب کاهشی

- ۱۰-۱- میانگین ۲۳۴
- ۱۰-۲- واریانس ۲۴۰
- ۱۰-۳- حداقل مربعات وزنی ۲۴۲
- ۱۰-۴- احتمالات دیگر ۲۴۳
- ۱۰-۴-۱- کاربرد: VaR هیبریدی ۲۴۴



CHAPTER

1

• مباحث پایه در علوم ریاضی

۱- فصل اول: مباحث پایه در علوم ریاضی

در فصل جاری سه مفهوم علوم ریاضی؛ لگاریتم‌ها^۱، ترکیبات^۲، سری‌های هندسی^۳ و یک مبحث در حوزه امور مالی تحت عنوان فاکتورهای تنزیل^۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف تأکید بر جنبه‌های خاص این مباحث است که در مدیریت ریسک کاربرد دارند.

۱-۱- لگاریتم‌ها

در ریاضیات، لگاریتم‌ها یا لگ‌ها به صورت زیر با توان‌ها^۵ در ارتباط هستند:

$$\log_b a = X \Leftrightarrow a = b^X \quad (1-1)$$

"لگاریتم a در مبنای b ، مساوی با x است که به طور ضمنی بیان می‌کند a مساوی با b به توان x و بالعکس". اگر لگاریتم سمت راست معادله (۱-۱) محاسبه گردد و مساوی سمت چپ معادله قرار داده شود، می‌توان نشان داد که:

$$\log_b(b^x) = X \quad (1-2)$$

با بدست آوردن لگاریتم b^x ، توان حذف شده و x باقی می‌ماند. از ویژگی مهم لگاریتم‌ها این است که لگاریتم حاصل ضرب دو متغیر X و Y برابر با مجموع لگاریتم‌های آن دو متغیر است.

$$\log_b(XY) = \log_b Y + \log_b X \quad (1-3)$$

به طور مشابهی، لگاریتم دو متغیر کسری، برابر تفاوت لگاریتم تک‌تک آن‌ها است:

$$\log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_b X - \log_b Y \quad (1-4)$$

اگر در معادله (۱-۳)، X جایگزین Y شود، خواهیم داشت:

$$\log_b(X^Y) = Y \log_b X \quad (1-5)$$

¹ Ogarithms

² Combinatorics

³ Geometric Series

⁴ Discount Factors

⁵ Exponents

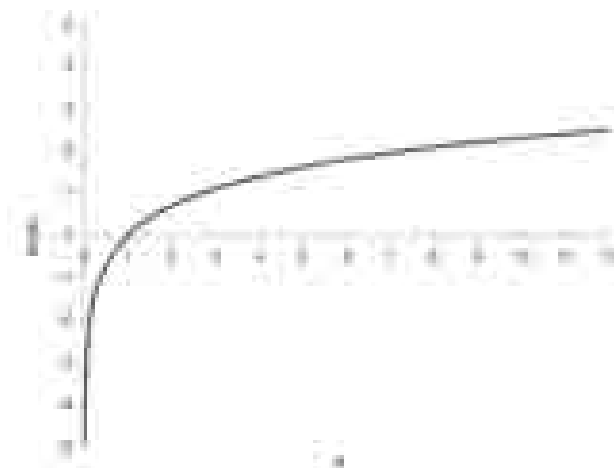
می توان نتایج را با بدست آوردن فرمول توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$\log_b(X^n) = n \log_b X \quad (1-6)$$

به طور کلی، مبنای لگاریتم b می تواند هر مقداری باشد. مبنای 10 و مبنای 2 مبناهای رایج در رشته های خاص هستند، اما در بیشتر رشته ها به ویژه در مالی عدد اوپلر^۱ (e) رایج تر است. مبنای e به قدری مرسوم است که ریاضی دانان برای آن نمادی ارائه نمودند. وقتی پایه لگاریتم e است به آن لگاریتم طبیعی^۲ می نامیم و در فرمول زیر می نویسیم:

$$\ln(a) = X \Leftrightarrow a = e^X \quad (1-7)$$

همان طور که بحث شد، فرض می شود که مبحث لگاریتم ها به لگاریتم طبیعی دلالت دارد. لگاریتم ها به صورت هر عدد حقیقی بزرگتر - مساوی صفر تعریف می شوند. شکل (۱-۱) نمودار تابع لگاریتمی را نشان می دهد.



نمودار ۱-۱: نمودار تابع لگاریتمی

لگاریتم صفر، منفی بی نهایت^۳ ($-\infty$) است و لگاریتم یک، صفر است. تابع لگاریتم بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد، یعنی همان طوری که X به بی نهایت می رسد، $\ln(X)$ نیز به مقدار بی نهایت نزدیک می شود.

¹ Euler's Number

² Natural Logarithm

³ Negative Infinity

بازده‌های لگاریتمی

لگاریتم بازده یکی از رایج‌ترین کاربرد لگاریتم‌ها در مالی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_t = \ln(1 + R_t) \quad (1-8)$$

جایی که $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ است.

در اینجا r_t بازده لگاریتمی در زمان t ، R_t بازده استاندارد یا ساده^۱ و P_t قیمت اوراق بهادار در زمان t است. در کل کتاب این رابطه از حرف بزرگ R به عنوان نماد سرمایه^۲ و از حرف کوچک r به عنوان لگاریتم بازده‌ها استفاده می‌شود. این نمادها رایج هستند، اما به هیچ وجه عمومی و به عنوان یک قاعده کلی نیست. همچنین دقت داشته باشید که لگ بازده، لگ R_t نیست، بلکه لگ $(1 + R_t)$ است. برای مقادیر کوچک، اندازه بازده‌های لگاریتمی و بازده‌های ساده بسیار نزدیک هم هستند. بازده ساده صفر درصد دقیقاً به لگ بازده صفر درصد و همچنین بازده ساده ۱۰ درصد به لگاریتم بازده ۹٫۵۳ درصدی تفسیر می‌شود. از آنجایی که مقادیر بسیار نزدیک هم هستند، بنابراین برای کنترل داده‌ها و جلوگیری از خطاهای عملیاتی^۳ مناسب و سازگار هستند. جدول ۱-۱ تعدادی از بازده‌های ساده و بازده‌های لگاریتمی متناظر آن‌را نشان می‌دهد.

جدول ۱-۱: بازده‌های لگاریتمی و بازده‌های ساده (%)

R	$\ln(1 + R)$
۱	۱
۵	۴٫۸۸
۱۰	۹٫۵۳
۲۰	۱۸٫۲۳

^۱ Standard Or Simple Return

بازده حاصل از سرمایه‌گذاری‌ها با تقسیم درآمد به علاوه سود سرمایه‌ای بر سرمایه سرمایه‌گذاری شده است. اثر مرکب کردن در نظر گرفته نمی‌شود. نقدهایی نیز بر کاربرد نرخ بازده ساده در تحلیل‌های گوناگون سرمایه‌گذاری وارد شده است، چرا که در این روش زمان‌بندی خروجی‌ها و ورودی‌های سرمایه آشکار نیست و نیز ارزش زمانی پول در نظر گرفته نمی‌شود (مترجمان).

^۲ Convention Of Capital

^۳ Operational Errors

برای دستیابی به تخمین دقیق‌تر رابطه‌ی بین بازده‌های استاندارد و بازده‌های لگاریتمی می‌توان از تخمین‌زن زیر استفاده نمود^۱:

$$r \approx R - \frac{1}{4} R^2 \quad (1-9)$$

تا زمانی که R کوچک است؛ عبارت دوم سمت راست معادله ۱-۹ ناچیز (خیلی کم) است و بازده لگاریتمی و بازده ساده بسیار مشابه هم خواهند بود.

۱-۲- مرکب کردن

بازده‌های لگاریتمی ممکن است پیچیده‌تر از بازده‌های ساده باشند، اما در امور مالی بازده‌های لگاریتمی کاربرد بالاتری از بازده‌های ساده دارند. یکی از پُرکاربردترین ویژگی بازده‌های لگاریتمی این است که بایستی با بازده‌های مرکب اجرا شود. برای دستیابی به بازده اوراق بهادار با استفاده از بازده‌های ساده در طی دو دوره، کاری که انجام می‌شود بسیار شهودی و قابل درک نیست، یعنی افزودن عدد یک به هر یک از بازده‌ها، سپس ضرب آن و نهایتاً کم کردن عدد یک از آن:

$$R_{\tau,t} = \frac{P_t - P_{t-\tau}}{P_{t-\tau}} = (1 + R_{1,t})(1 + R_{1,t-1}) - 1 \quad (1-10)$$

در اینجا، اندیس^۲ اول R به طول بازده^۳ دلالت دارد و اندیس دوم، زمان گذشته است. با بازده‌های لگاریتمی، محاسبه بازده‌های چند دوره‌ای بسیار ساده‌تر است و آن را به سادگی جمع می‌کنیم:

$$r_{\tau,t} = r_{1,t} + r_{1,t-1} \quad (1-11)$$

با جایگزین کردن معادله ۸-۱ از طریق معادلات ۱-۱۰ و ۱-۱۱، مشخص می‌شود که این دو معادله شبیه هم هستند. همچنین تعمیم این نمادها به هر طول بازده‌ی، نسبتاً ساده است.

مثال

با استفاده از معادله ۸-۱ و ۱-۱۰ بازده هر طول را در معادله ۱-۱۱ تعمیم دهید.

پاسخ:

$$R_{n,t} = \frac{P_t - P_{t-n}}{P_{t-n}} = \frac{P_t}{P_{t-n}} - 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \dots \frac{P_{t-n+1}}{P_{t-n}} - 1$$

^۱ این تقریب را می‌توان با بسط معادله ۸-۱ تیلور در حدود صفر به دست آورد.

^۲ Denotes

^۳ Length Of The Return

$$R_{n,t} = (1 + R_{1,t})(1 + R_{1,t-1}) \dots (1 + R_{1,t-n+1}) - 1$$

$$1 + R_{n,t} = (1 + R_{1,t})(1 + R_{1,t-1}) \dots (1 + R_{1,t-n+1})$$

$$r_{n,t} = r_{1,t} + r_{1,t-1} + \dots + r_{1,t-n+1}$$

همان‌طوری که در معادله ۳-۱ نشان داده شده، برای بدست آوردن خط پایانی، لگ‌های دو طرف معادله‌ی قبلی را با استفاده از این واقعیت که لگ حاصل ضرب هر دو متغیر معادل مجموع لگ‌های آن است، بدست می‌آید.

۳-۱- مسئولیت محدود^۱

از ویژگی مهم لگاریتم بازده‌ها مسئولیت محدود است. در بسیاری از دارایی‌های مالی^۲ از جمله سهام و قرضه بیشترین چیزی که از دست می‌دهید ارزشی است که در آن سرمایه‌گذاری شده است. به عنوان مثال، اگر سهام شرکت XYZ را ۱۰۰ دلار خریداری نمایید، بیشترین چیزی که می‌توان از دست داد همان ۱۰۰ دلار است. این به عنوان مسئولیت محدود شناخته شده است. امروزه مسئولیت محدود ویژگی رایج ابزارهای مالی محسوب می‌شود که به آسانی مورد پذیرش واقع می‌شود، در حالی که همیشه مورد قبول نیست. در واقع، پذیرش زیاد مسئولیت محدود در قرن نوزدهم در شرکت‌های تجاری عمومی بزرگ امکان‌پذیر بوده که برای اقتصاد نوین و همچنین بازارهای مالی بسیار مهم هستند.

اینکه فقط سرمایه‌گذاری اولیه خود را از دست دهید بدین معناست که حداقل بازده ممکن سرمایه‌گذاری ۱۰۰- درصد خواهد بود. در انتهای دیگر این طیف، هیچ حد بالایی^۳ در ارزشی که می‌توانید در آن سرمایه‌گذاری کنید وجود ندارد. در تئوری، حداکثر بازده احتمالی، نامتناهی^۴ (بی‌نهایت) است. این محدوده برای بازده‌های ساده ۱۰۰- درصد تا بی‌نهایت و برای بازده‌های لگاریتمی از محدوده منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت تعریف می‌شود.

$$R_{\min} = -100\% \Rightarrow r_{\min} = -\infty$$

$$R_{\max} = +\infty \Rightarrow r_{\max} = +\infty \quad (1-12)$$

همان‌طور که در فصول بعدی ملاحظه می‌گردد، در امور مالی وقتی به مدل‌های ریاضی و کامپیوتری پرداخته می‌شود، اغلب کار با متغیرهای نامحدود (بی‌کران)^۵ بسیار ساده‌تر است، یعنی متغیرهایی که می‌توانند محدوده‌ی منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت داشته باشند.

¹ Limited Liability

² Financial Assets

³ Upper Limit

⁴ Infinite

⁵ Unbounded

۴-۱- ترسیم لگاریتم بازده‌ها

از دیگر ویژگی مهم بازده‌های لگاریتمی این است که چگونه با لگ قیمت‌ها مرتبط هستند. با چیدمان مجدد معادله ۱-۱۰ و محاسبه لگاریتم‌ها، به آسانی قابل مشاهده است:

$$r_t = p_t - p_{t-1} \quad (1-13)$$

جایی که p_t لگاریتم P_t است. برای محاسبه لگاریتم بازده‌ها، به جای محاسبه لگاریتم یک به علاوه بازده ساده، می‌توانیم به سادگی لگاریتم‌های قیمت‌ها را از یکدیگر کم (تفاضل) کنیم. همچنین لگاریتم‌ها جهت ترسیم نمودار سری‌های زمانی که به شکل نمایی رشد می‌یابند، مفید واقع می‌شود. بسیاری از برنامه‌های کامپیوتری اجازه می‌دهند تا نمودار داده‌ها در مقیاس لگاریتمی ترسیم گردد. برای یک دارایی که قیمت آن به طور نمایی رشد می‌یابد، مقیاس لگاریتمی در سطوح پایین از فشردگی داده^۱ جلوگیری می‌کند. با چیدمان مجدد معادله ۱-۱۳ به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که در کل زمان، تغییر لگاریتم قیمت، معادل لگاریتم بازده است:

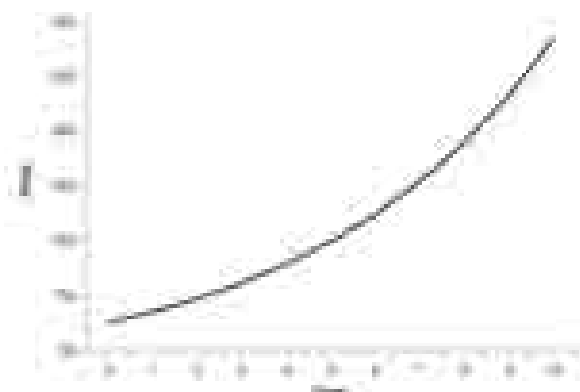
$$\Delta p_t = p_t - p_{t-1} = r_t \quad (1-14)$$

از این رو برای دارایی‌هایی که بازده آن‌ها ثابت است، تغییر در لگاریتم قیمت نیز با گذشت زمان ثابت خواهد بود. در یک نمودار نرخ ثابت در کل زمان با شیب ثابتی تغییر می‌کند. نمودارهای ۱-۲ و ۱-۳ دو قرضه که قیمت آن‌ها سالانه ۲۰ درصد افزایش می‌یابد را نشان می‌دهد. محور y نمودار اول، قیمت و محور y نمودار دوم لگ قیمت را نشان می‌دهد.

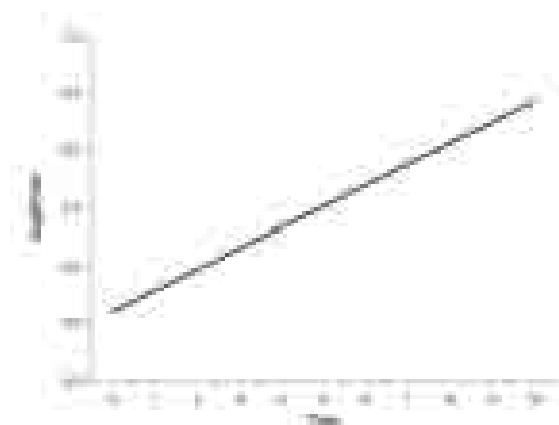
برای ترسیم نمودار ۱-۲، بیان اینکه نرخ بازده در کل زمان، افزایش یا کاهش می‌یابد مشکل است. در نمودار ۱-۳ این واقعیت وجود دارد که خط مستقیم، شیب ثابتی معادل نرخ بازده ثابت را ارائه می‌دهد. در معادله ۱-۱۴ شیب ثابت، معادل نرخ بازده ثابت است.

^۱ Compression Of Data

در علوم کامپیوتر و نظریه اطلاعات، فشردگی داده‌ها، در واقع فرایند کد کردن اطلاعات با استفاده از تعداد بیت‌هایی کمتر از همان اطلاعات کد نشده و با به کار گرفتن روش‌های ویژه کد کردن است. برای مثال در جمله «من به خانه‌مان برگشتم» ضمایر «من» و «مان» را می‌توان حذف کرد و جمله را این گونه نوشت: «به خانه برگشتم»، بدون اینکه از مفهوم جمله چیزی کاسته شود.



نمودار ۱-۲: قیمت عادی



نمودار ۱-۳: لگاریتم قیمت

در نمودار اول، محور y در مقیاس لگ می تواند قیمت واقعی باشد، اما داشتن لگ قیمت ها اجازه می دهد تا مورد دیگری را انجام دهیم. به سادگی با استفاده از معادله ۱-۱۳ می توان لگاریتم بازده را تخمین زد. در طی ۱۰ دوره، لگاریتم قیمت به طور تقریبی از $4/6$ به $6/4$ افزایش یافته است. با کسر نمودن دو مقدار $(6/4 - 4/6)$ و تقسیم آن بر عدد ۱۰، عدد ۱۸ درصد را می دهد. بنابراین لگ بازده هر دوره ۱۸ درصد است. از آنجایی که برای ارزش های کوچک، بازده های لگاریتمی و بازده های ساده خیلی نزدیک هم هستند، از اینرو خیلی به بازده ساده واقعی ۲۰ درصد نزدیک است.

۵-۱- بازده‌های مرکب مادام‌العمر^۱ (دائمی)

از دیگر مباحث مطروحه در بازده‌های لگاریتمی، بازده‌های مرکب دائمی است. در بسیاری از محصولات مالی از جمله اوراق قرضه^۲، اوراق رهنی^۳ و کارت‌های اعتباری، نرخ‌های بهره بر اساس دوره‌ی سالانه یا بر مبنای اسمی اعلام می‌شوند. در تاریخ پرداخت، مقدار پرداختی که معادل نرخ اسمی است به تعداد دوره‌ها تقسیم و در ارزش فرضی ضرب می‌شود.

به عنوان مثال، قرضه‌ای پرداخت‌هایی با کوپن ماهانه و نرخ اسمی ۶ درصد و ارزش فرضی ۱,۰۰۰ دلار دارد. کوپن ۵ دلاری ماهانه پرداخت می‌شود (حاصل ضرب ۱,۰۰۰ در ۶ درصد و تقسیم آن به ۱۲). چگونه دو ابزار مالی با تعداد پرداختی‌های مختلف با هم مقایسه گردند؟ آیا بهتر است ۵ درصد به صورت سالانه پرداخت کنید یا ۴/۵ درصد به صورت ماهانه؟ یک راه حل این است که نرخ اسمی به نرخ سالانه تبدیل گردد:

$$R_{\text{سالانه}} = \left(1 + \frac{R_{\text{اسمی}}}{n}\right)^n - 1 \quad (1-15)$$

جایی که n ، تعداد دوره سالانه است. زمانی که n افزایش می‌یابد با فرض ثابت بودن R سالانه، R اسمی در نرخ کاهنده کوچک می‌شود. اگرچه در اینجا برهان حذف می‌شود، با استفاده از قانون هوپیتال^۴ می‌توان ثابت نمود که، در محدوده‌ی زمانی که n به بی‌نهایت می‌رسد، R اسمی به نرخ لگ نزدیک می‌شود. زمانی که n به بی‌نهایت می‌رسد، ابزار به طور پیوسته به بی‌نهایت کوچک شدن می‌پردازد. از این جهت برای تعریف نرخ‌های بهره از نرخ لگاریتم استفاده می‌شود که اغلب به نرخ مرکب دائمی یا نرخ پیوسته ساده اشاره دارد. همچنین از طریق نرخ‌های دائمی می‌توان دو ابزار مالی با دوره‌های متفاوت را با یکدیگر مقایسه کرد.

مثال

دو قرضه پیشنهاد می‌شود که اولی نرخ اسمی ۲۰ درصد با پرداخت شش ماهه و دومی نرخ اسمی ۱۹ درصد با پرداخت ماهانه دارد. نرخ مرکب دائمی هر قرضه را محاسبه کنید. فرض شود که دو قرضه کیفیت اعتباری مشابه‌ای دارند و در تمامی ویژگی‌های دیگر نیز مشابه هم هستند. کدام سرمایه‌گذاری بهتر است؟

¹ Continuously Compounded Returns

² Bonds

³ Mortgages

⁴ L'ho'pital's Rule

پاسخ:

ابتدا بازده سالانه دو قرضه را محاسبه می‌کنیم.

$$R_{1, \text{سالانه}} = \left(1 + \frac{20\%}{2}\right)^2 - 1 = 21\%$$

$$R_{2, \text{سالانه}} = \left(1 + \frac{19\%}{12}\right)^{12} - 1 = 20.75\%$$

سپس بازده‌های سالانه را به بازده‌های مرکب دائمی تبدیل می‌کنیم:

$$r_1 = \ln(1 + R_{1, \text{سالانه}}) = 19.06\%$$

$$r_2 = \ln(1 + R_{2, \text{سالانه}}) = 18.85\%$$

تمامی ویژگی‌های دیگر دو قرضه مشابه هستند، لذا قرضه اول، سرمایه‌گذاری بهتری است. این مقایسه را می‌توان بر اساس نرخ‌های مرکب دائمی یا سالانه پایه‌گذاری کرد.

۶-۱- ترکیبات^۱

در مبحث ترکیبات ابتدا مفهوم جایگشت‌ها^۲ مطرح می‌شود. ترکیبات می‌گویند که چه تعداد روشی وجود دارد تا بتوان تعدادی شیء^۳ را صرف‌نظر از مرتبه^۴ آن مرتب کنیم، در حالی که جایگشت‌ها می‌گویند که چه تعداد روشی وجود دارد تا بتوانیم تعدادی شیء را با توجه به مرتبه آن، مرتب کنیم.

به عنوان مثال فرض شود که سه صندوق پوشش ریسک^۵ با نام‌های X، Y و Z موجود است. قصد داریم در دو مورد از آنها سرمایه‌گذاری نماییم. سرمایه‌گذاری با روش‌های متعددی مانند سرمایه‌گذاری در X و Y، Z و X یا Y و Z امکان‌پذیر است.

به‌طور کلی، اگر n شیء داشته باشیم و بخواهیم k شیء را از آن انتخاب کنیم، تعداد ترکیبات C(n, k) را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1-16)$$

جایی که n! به معنی n فاکتوریل است.

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\dots 1 & n > 0 \end{cases} \quad (1-17)$$

¹ Combinatorics

² Permutations

³ Objects

⁴ Regardless Of The Order

⁵ Hedge Funds

در مثال فوق $n=3$ و $k=2$ است و جهت دستیابی به ۳ ترکیب احتمالی با یکدیگر جایگزین می‌شوند. چرا مرتبه اهمیت دارد؟ چرا به جای انتخاب دو صندوق نیاز به انتخاب صندوق رتبه اول^۱ و صندوق رتبه دوم^۲ داریم؟ به چند روش می‌توان آن را انجام داد؟ پاسخ تعداد جایگشت‌هایی است که شرح داده می‌شود:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1-18)$$

برای هر ترکیب، $k!$ انتخاب وجود دارد که عناصر ترکیبی آن می‌توانند مرتب شوند. زمانی که صندوق را انتخاب می‌کنیم دو روش وجود دارد که می‌توان آنرا مرتب کرد، پس انتظار داریم که جایگشت‌ها زیادی دو برابر شوند. به طور مثال، با جابه‌جایی $n=3$ و $k=2$ در معادله ۱-۱۸، ۶ جایگشت بدست می‌آید که دو برابر تعداد ترکیبات محاسبه شده در قبل است.

ترکیبات کاربرد گسترده‌ای در مدیریت ریسک دارند. در فصل چهارم توزیع دو جمله‌ای^۳ که با استفاده از ترکیبات مشخص می‌شوند معرفی می‌گردد. توزیع دو جمله‌ای به نوبه‌ی خود می‌تواند برای مدل نکول (عدم پرداخت)^۴ قرضه ساده یا برای پس آزمایی^۵ مدل‌های ارزش در معرض ریسک^۶ (Var) (در فصل پنجم ملاحظه می‌شود) استفاده گردد. همچنین ترکیبات مرکز قضیه دو جمله‌ای محسوب می‌شوند. با ارائه دو متغیر X و Y و عدد صحیح مثبت n قضیه دو جمله‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(X + Y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Y^k X^{n-k} \quad (1-19)$$

به عنوان مثال:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad (1-20)$$

هنگام محاسبه آماره‌های واریانس^۷، چولگی^۸ و کشیدگی^۹ که در فصل سوم بحث می‌شوند، قضیه دو جمله‌ای می‌تواند، مفید واقع شود.

¹ First-Place Fund

² Second-Place Fund

³ Binomial Distribution

⁴ Model Defaults

⁵ Back-Test

⁶ Value At Risk

⁷ Variance,

⁸ Skewness,

⁹ Kurtosis,

۱-۲- فاکتورهای تنزیل^۱

بیشتر افراد درآمد فعلی را بر درآمد آتی و همچنین داشتن یک دلار امروز را در مقابل یک دلار سال آتی ترجیح می‌دهند و این بدان دلیل است که بانک‌ها از وام بهره دریافت می‌کنند و سرمایه‌گذاران انتظار بازده‌های مثبت در سرمایه‌گذاری‌های خود دارند. حتی با وجود عدم تورم، یک فرد عاقل و منطقی یک دلار امروز را به یک دلار فردا ترجیح می‌دهد. به عبارتی دیگر، به بیش از یک دلار در آینده برای جایگزین نمودن آن با یک دلار امروز نیاز داریم.

در امور مالی اغلب از جریان‌های نقدی تنزیل شده یا ارزش‌های آتی بحث می‌شود. اگر نرخ تنزیل R ثابت در نظر گرفته شود، ارزش فعلی^۲ و ارزش آتی^۳ به صورت زیر با یکدیگر در ارتباط هستند:

$$V_t = \frac{V_{t+n}}{(1+R)^n} \quad (1-21)$$

جایی که V_t ارزش دارایی در زمان t و V_{t+n} ارزش دارایی زمان $t+n$ است. از آنجایی که R مثبت است، V_t لزوماً کمتر از V_{t+n} خواهد بود. وقتی سایر موارد مشابه باشند، نرخ تنزیل بالاتر منجر به ارزش فعلی پایین‌تر خواهد شد. به طور مشابه‌ای با بزرگتر شدن n ارزش فعلی جریان نقدی آتی کوچکتر خواهد شد. به جای استفاده از نرخ تنزیل R ، در برخی موارد استفاده از بازده به عنوان عامل تنزیل آسان‌تر است. به منظور دستیابی به ارزش فعلی، به سادگی می‌توان ارزش آتی را در فاکتور تنزیل ضرب کرد.

$$V_t = \left(\frac{1}{1+R}\right)^n V_{t+n} = \delta^n V_{t+n} \quad (1-22)$$

از آنجایی که δ کوچکتر از یک است، V_t کمتر از V_{t+n} خواهد بود. نویسندگان متعددی از δ یا δ^n به عنوان فاکتور تنزیل یاد می‌کنند.

¹ Discount Factors

² Present Value

³ Future Value

۸-۱- سری‌های هندسی^۱

در دو بخش ذیل سری‌های هندسی معرفی می‌گردند. با سری‌های طولی نامتناهی^۲ شروع می‌شود و سپس با توجه به نتایج موجود به سوی سری‌های طولی متناهی^۳ می‌رویم.

۸-۱-۱- سری‌های نامتناهی

زنو^۴ فیلسوف یونان باستان در یکی از پارادوکس‌های (تناقض) مشهور خود، سعی در اثبات این موضوع را داشت که حرکت یک خطای حسی است و دارای حقیقت نیست^۵، زیرا به منظور دستیابی آن در هر جا، ابتدا باید نیمی از مسافت را برای مقصد نهایی طی نمود. هنگامی که به نقطه نیمه راه رسیدید، بایستی نیمی از فاصله باقی‌مانده را طی نمود. فرقی نمی‌کند که چه تعداد از نیم مسافت‌ها کامل شود، همیشه نیمه دیگر مسافت باقی‌مانده است. احتمالاً نمی‌توانید هرگز به مقصد خود برسید. بعد از اثبات اشتباه قضیه «زنو» مشخص گردید که اشتباه بسیار بزرگی بوده است. "زنو" فواصل به طور نامتناهی کاهش را با محاسبه از قبل و با مفهوم تغییر آن در مقیاس بی‌نهایت کوچک مورد بحث قرار داد. همچنین در رشته‌های مختلفی سری‌های نامتناهی مطرح گردید. در امور مالی اغلب با سری‌هایی که نامتناهی هستند مواجه می‌شویم. به وضوح حتی زمانی که سری‌های طولانی محدود هستند، ابزارهای اساسی مشابه جهت بررسی توسعه سری‌های نامتناهی در دسترس است. به طور اساسی در مورد پارادوکس اصلی سعی می‌شود تا جمع زیر محاسبه گردد:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots \quad (1-23)$$

S مساوی چیست؟ خوشبختانه، روشی ساده‌تر وجود دارد. ترفند این گونه است که ضرب $\frac{1}{4}$ در طرفین مساوی اثر مشابه و دقیقی در مقابل کسر کردن $\frac{1}{4}$ از هر دو سمت دارد:

¹ Geometric Series

² Series Of Infinite Length

³ Series Of Finite Length

⁴ Zeno

⁵ چون مفهوم حرکت متناقض است. بنابراین دارای حقیقت نیست. زنو برای انتقاد به طرفداران هراکلیتی که جهان فقط شامل حرکت و تغییر است و هیچ ثابتی در اشیاء وجود ندارد تعدادی از قضایای متناقض (پارادوکس) را مطرح کرد.

کم کردن طرفین از $\frac{1}{4}$:	ضرب طرفین در $\frac{1}{4}$:
$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$	$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$
$S - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$	$\frac{1}{4}S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$

از آنجایی که سمت راست دو معادله مشابه هم هستند، لذا سمت چپ دو معادله نیز بایستی مساوی هم باشند. سمت چپ هر دو معادله را بدست آورید و حل کنید.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}S &= S - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}S &= \frac{1}{4} \quad (1-24) \\ S &= 1\end{aligned}$$

در واقع سری‌های نامتناهی با عدد یک جمع می‌شود و بیان می‌کند که زنو در اشتباه بود. اگر نیمی از مسافت حفظ و در تعداد دفعات نامعینی انجام شود، کل مسافت را طی می‌کند. مجموع تمامی نیمه مسافت‌ها با کل فاصله برابر است. برای تعمیم پارادوکس "زنو"، فرض شود که سری‌های زیر در دست است:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i \quad (1-25)$$

در اینجا زنو δ ، $\frac{1}{4}$ است. از آنجایی که تمامی اعضای سری‌ها از قدرت یکسانی برخوردار هستند، به این نوع سری‌ها به عنوان سری‌های هندسی اشاره داریم. مادامی که $|\delta|$ کمتر از یک باشد، مجموع آن نامتناهی خواهد بود و می‌توان از استراتژی اساسی مشابه قبل استفاده نمود، در این زمان دو طرف را در δ ضرب می‌کنیم.

$$(1-26)$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i+1} \\ \delta S &= S - \delta^t = S - \delta \\ S(1 - \delta) &= \delta \\ S &= \frac{\delta}{1 - \delta}\end{aligned}$$

باجابجایی $\frac{1}{p}$ با δ ، ملاحظه می‌شود که تناقض زنو در کل معادله با نتیجه بدست آمده از قبل سازگار است. با دستیابی به معادله ۲۶-۲، شرح دادیم که $|\delta|$ باید کمتر از یک باشد. شاید دلیل اینکه $|\delta|$ بایستی کمتر از یک باشد واضح نباشد. اگر δ مساوی با یک باشد، به سادگی آنرا با مقدار بی‌نهایت جمع می‌شود که مجموع بی‌نهایت خواهد شد. اگرچه در این مورد نیاز است بر صفر تقسیم شود که در این صورت معادله ۲۶-۱ پاسخ درستی را ارائه می‌دهد.

اگر δ بزرگتر از یک باشد، مجموع نامتناهی است، اما معادله ۲۶-۱ پاسخ اشتباه را ارائه داد. اگر δ کوچکتر از یک باشد، پس δ^∞ به صفر نزدیک می‌شود. وقتی که دو طرف معادله اصلی در δ ضرب شود، عبارت $\delta^{\infty+1}$ را به انتهای معادله اصلی می‌افزاییم. اگر $|\delta|$ کمتر از یک باشد، این عبارت نیز صفر می‌شود و مجموع بدون تغییر است. اگر $|\delta|$ بزرگتر از یک باشد، عبارت پایانی به طور نامتناهی بزرگ می‌شود و با فرض این که مجموع آن بدون تغییر باشد اشتباه است، اگر مجهول باشد، تا انتهای بخش زیر سری‌های متناهی منتظر بمانید، جایی که مجدداً به این مسئله مواجه می‌شویم. اگر δ کمتر از ۱- باشد به طور فزاینده‌ای سری‌ها بین ارزش‌های بزرگ منفی و مثبت در نوسان خواهد بود و با یکدیگر جمع نخواهند شد. نهایتاً، اگر δ مساوی با ۱- باشد، سری‌ها بین ۱- و ۱+ متغیر خواهد بود و مجموع آن بین ۱- و ۰ است.

تکته: در مسائل مالی ویژه با سری‌های هندسی مواجه می‌شویم. به جز عبارت اول که ۱ است (نه δ) بسیار شبیه معادله‌ی ۲۵-۱ می‌باشد. در معادله جدید $i=0$ به معادله ۲۵-۱ اضافه شده که برابر $(\delta^0 = 1)$ است. با افزودن عدد ۱ به نتیجه قبلی، معادله زیر بدست می‌آید:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i = \frac{1}{1-\delta} \quad (1-27)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، تغییر $i=0$ به $i=1$ بسیار دقیق و تأثیر بسزایی دارد.

مثال

اوراق دائمی، اوراقی است که کوپن ثابتی را به طور دائمی پرداخت می‌کند. ارزش فعلی دائمی با پرداخت سالانه ۵ دلار را تعیین کنید. فرض شود که نرخ تنزیل ۴ درصد باشد.

پاسخ:

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{5}{(1.04)^i}$$

$$V = 5 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1.04}\right)^i = 5 \sum_{i=1}^{\infty} 0.96^i = 5 \frac{0.96}{1-0.96} = 5.25$$

$V = 125$

۲-۸-۱- سری‌های متناهی

در بسیاری از سناریوهای مالی از جمله مدل‌های دائمی و تنزیلی سهام و املاک و مستغلات^۱ اغلب ساده است که یک سری از پرداخت‌های طولانی را به گونه‌ای انجام دهیم که گویی نامتناهی است. در موقعیت‌های دیگر با سری‌های خیلی بلندمدت و کاملاً متناهی مواجه هستیم. این موقعیت‌ها برای راه حل سری‌های متناهی برآورد خوبی ارائه می‌دهد و نهایتاً پاسخ دقیق‌تری را ارائه می‌دهد. تکنیک اساسی مجموع سری‌های بلندمدت و هندسی متناهی، مشابه سری‌های هندسی نامتناهی است. تنها تفاوت این است که عبارات پایانی به صفر نزدیک نیست (همگرا نیست).

(۱-۲۸)

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \delta^i$$

$$\delta S = \sum_{i=0}^{n-1} \delta^{i+1} = S - \delta^0 + \delta^n$$

$$S = \frac{1 - \delta^n}{1 - \delta}$$

می‌توان ملاحظه کرد که برای $|\delta|$ کمتر از ۱ هنگامی n به متناهی می‌رسد، S^n به صفر میل می‌کند و معادله ۲۸-۱ به معادله ۱-۲۶ نزدیک می‌شود. در امور مالی، اغلب علاقمند موقعیت‌هایی هستیم که $|\delta|$ کمتر از ۱ باشد، اما کماکان برای ارزش‌های $|\delta|$ بیشتر از ۱ معادله ۱-۲۸ برخلاف معادله ۱-۲۶ معتبر است. اگر δ بزرگتر از ۱ باشد و بی‌نهایت به جای n جایگزین شود فرمول زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1 - \delta^\infty}{1 - \delta} = \frac{1 - \infty}{1 - \delta} = \frac{-\infty}{1 - \delta} = \infty \quad (1-29)$$

برای مرحله نهایی به این حقیقت متکی هستیم که $(\delta - 1)$ برای δ بیشتر از ۱- است. همان‌طور که در بخش قبلی اشاره گردید، برای δ بزرگتر از ۱، مجموع سری‌های هندسی نامتناهی و در واقع نامتناهی است.

مثال

ارزش فعلی قرضه ۲۰ ساله منتشر شده جدید با ارزش فرضی ۱۰۰ دلار و کوپن ۵ درصدی سالانه چقدر است؟ فرض شود که نرخ تنزیل ۴ درصد ثابت و ریسک نکول وجود نداشته باشد.

پاسخ:

^۱ Real Estate

این سوال از فاکتور تنزیل و سری‌های هندسی متناهی استفاده می‌نماید. قرضه ۲۰ کوپن ۵ دلاری که در یک زمان از سال شروع می‌شود پرداخت می‌کند. همچنین؛ ارزش اسمی قرضه و پرداخت آخرین کوپن در سال بیستم بازگشت داده می‌شود. از اینرو ارزش جاری (V) به شرح زیر می‌شود:

$$V = \sum_{i=1}^{20} \frac{5}{(1.04)^i} + \frac{100}{(1.04)^{20}} = 5 \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{1.04}\right)^i + \frac{100}{(1.04)^{20}}$$

ارزیابی مجموع با استفاده از فاکتور تنزیل ($\delta = \frac{1}{1.04} = 0.96$) داریم:

$$S = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(1.04)^i} = \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{1.04}\right)^i = \sum_{i=1}^{20} \delta^i = \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{19} + \delta^{20}$$

$$\delta S = \delta^2 + \delta^3 + \dots + \delta^{20} + \delta^{21} = S - \delta + \delta^{21}$$

$$S(1 - \delta) = \delta - \delta^{21}$$

$$S = \frac{\delta - \delta^{21}}{1 - \delta} = 13.59$$

با قرار دادن نتایج در معادله‌ی اول، نتیجه نهایی بدست می‌آید:

$$V = 5 \times 13.59 + \frac{100}{(1.04)^{20}} = 113.59$$

توجه شود که ارزش فعلی قرضه ۱۱۳/۵۹ دلاری بیشتر از ارزش اسمی ۱۰۰ دلاری است.

به‌طور کلی اگر هیچ ریسک نکولی وجود نداشته باشد و نرخ کوپن قرضه بالاتر از نرخ تنزیل باشد، گفته می‌شود که ارزش فعلی اوراق قرضه بیشتر از ارزش اسمی قرضه خواهد بود و وقتی ارزش قرضه کمتر از ارزش اسمی باشد می‌گوییم که قرضه به کسر یا تخفیف و همچنین وقتی ارزش قرضه بیشتر از ارزش اسمی باشد گفته می‌شود که با صرف به فروش می‌رسد. زمانی که ارزش فعلی دقیقاً با ارزش اسمی برابر باشد، گفته می‌شود که معادل ارزش اسمی به فروش رفته است.

مسائل

۱- مقدار y را در عبارات زیر حل کنید:

الف. $Y = \ln(e^5)$

ب. $Y = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

ج. $Y = \ln(\log)$

۲- نرخ اسمی ماهانه وامی ۵ درصد گزارش می‌شود. نرخ سالانه معادل آن چقدر است؟ نرخ نیمه سالانه (شش ماهه) و نرخ دائمی چقدر است؟

۳- در طی یک سال لگاریتم بازده شاخص بازار سهام ۱۱/۲ درصد است. ارزش اولیه شاخص ۱۰۰ است. ارزش پایان سال چقدر است؟

۴- پرتفویی با ۱۰ قرضه در اختیار دارید. به طور دقیق به چند روش مختلف می‌توان نکول دوتایی قرضه داشته باشیم؟ فرض شود که نکول قرضه با اهمیت نباشد.

۵- ارزش فعلی مبلغ ۱۰۰ دلاری که در هر سال برای همیشه پرداخت می‌شود چیست؟ از نرخ تنزیل سالانه ۴ درصد استفاده شود و فرض شود پرداخت اول دقیقاً در یک سال بعد انجام می‌شود.

۶- سهام abc یک دلار سود سهام در طی یک سال پرداخت خواهد کرد. فرض شود که سود سهام به طور سالانه برای همیشه تداوم داشته باشد و پرداخت سود سهام با نرخ ۵ درصد افزایش یابد. ارزش فعلی سود سهام را با استفاده از نرخ تنزیل سالانه ۶ درصد ارزیابی کنید.

۷- ارزش فعلی قرضه ۱۰ ساله با ارزش اسمی ۱۰۰ دلار که کوپن آن سالانه با نرخ ۶ درصد پرداخت می‌کند چقدر است؟ از نرخ تنزیل سالانه ۸ درصد استفاده شود.

۸- مقدار X را در عبارت زیر حل کنید.

$$e^{e^x} = 10$$

۹- مجموع عبارت مقابل را محاسبه کنید: $\sum_{i=0}^9 (-0.5)^i$

۱۰- دپارتمان ریسک شرکتی ۱۰ تحلیل‌گر دارد. نیاز به انتخاب ۴ تحلیل‌گر برای بکارگیری در کمیته حسابرسی ویژه دارید. چند گروه‌های احتمالی از چهار تحلیل‌گر را می‌توان گردآوری نمود؟

۱۱- ارزش فعلی قرضه ۱۰ ساله که اخیراً منتشر شده با ارزش اسمی ۱۰۰ دلار و کوپن سالانه ۲ درصد چقدر است؟ فرض شود که نرخ تنزیل سالانه ۵ درصد ثابت باشد و هیچ‌گونه ریسک نکولی وجود نداشته باشد.



CHAPTER

2

• احتمالات